Parçalı ve Mutlak Değerli Fonksiyonların Türevi

- Parçalı ve mutlak değerli fonksiyonların türevi araştırılırken türevi istenen nokta kritik nokta ise bu noktadaki sağdan ve soldan türevlerine bakılır.
- Türevi istenen nokta kritik nokta değilse

  Parçalı fonksiyonlarda fonksiyonun tanımlandığı bölgelere göre türev alınır.

  Mutlak değerli fonksiyonlarda mutlak değer işaretine göre incelenir daha sonra türev alınır.
- Ayrıca mutlak değerli fonksiyonlarda kritik nokta bir tane kök ise türev yoktur, çok katlı kök ise türev vardır ve sıfırdır.

ÖRNEK 6

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad x \geq 1 \\ x^2 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, aşağıdaki türev değerlerini bulunuz.

I. $f'(1)$ III. $f'(0)$

II. $f'(2)$ IV. $f'(-1)$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x \geq 1 \\ 2x & , \quad x < 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

I. x = 1 apsisli nokta kritik nokta olduğundan y = f(x) fonksiyonu bu noktada sürekli olmalıdır ve fonksiyonun bu noktadaki sağdan türevi ile soldan türevi birbirine eşit olmalıdır.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 1}$$

olduğundan **fonksiyon x = 1 apsisli noktada süreklidir.**

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^+) = 2 \\ f'(1^-) = 2 \cdot 1 = 2 \end{array}\right\} f'(1^+) = f'(1^-)$$

O halde $f'(1) = 2$ olur.

II. $f'(2) = 2$

III. $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$

IV. $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$ bulunur.

ÖRNEK 7

Aşağıda verilen fonksiyonların x = 2 apsisli noktalarındaki türevlerini bulunuz.

I. $f(x) = |x - 2|$

II. $g(x) = |(x - 2)^4|$

III. $h(x) = |x^2 - 2x|$

IV. $k(x) = |x^2 - 2x + 1|$

ÇÖZÜM

I. $f(x) = \begin{cases} x - 2 & , \quad x \geq 2 \\ -x + 2 & , \quad x < 2 \end{cases}$

ve

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 2 \\ -1 & , \quad x < 2 \end{cases}$$

şeklindedir.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$$

olduğundan y = f(x) fonksiyonu x = 2 apsisli noktada süreklidir.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^+) = 1 \\ f'(2^-) = -1 \end{array}\right\} f'(2^+) \neq f'(2^-)$$

O halde $f'(2)$ yoktur.

II. **$g(x) = (x - 2)^4$ fonksiyonunun türevi**

$g'(x) = 4(x - 2)^3$

$g'(2) = 0$ olur.

III. **$h(x) = |x \cdot (x - 2)|$**

fonksiyonu için x = 2 tek katlı kök olduğundan türev yoktur.

IV. **$k(x) = |(x - 1)^2| = (x - 1)^2$ fonksiyonunun türevi**

$k'(x) = 2(x - 1)^2$

$k'(x) = 2 \cdot (2 - 1)^2 = 2$ olur.

ÖRNEK 8

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu

$$f(x) = |x \cdot (x - 1)^2 \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)^3|$$

biçiminde veriliyor.

Buna göre, f fonksiyonunun

I. x = 0 III. x = 2 V. x = 4

II. x = 1 IV. x = 3

apsisli noktalarından kaç tanesinde türevlenebilir olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = |x \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)^3|$

$= |x| \cdot |(x-1)^2| \cdot |(x-2)| \cdot |(x-3)| \cdot |(x-4)^3|$

fonksiyonunun $x = 0$, $x = 2$ ve $x = 3$ apsisli noktalarında türevi yoktur.

Bunların dışında $x = 1$ ve $x = 4$ apsisli noktalarda f fonksiyonu türevlenebilir.

ÖRNEK 9

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu

$f(x) = x^2 - |6x + m|$

kuralı ile verilmiştir.

$f'(x_0) = 0$ denklemini sağlayan iki farklı gerçel sayı olduğuna göre,

I. $m = 16,4$

II. $m = -7,2$

III. $m = -19,1$

eşitliklerinden hangilerinin doğru olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

- $6x + m > 0$ ise $x > \frac{-m}{6}$ olur.

$f(x) = x^2 - (6x + m)$

$f'(x_0) = 2x_0 - 6$

$0 = 2x_0 - 6$

$3 = x_0$

$3 > \frac{-m}{6}$

$\mathbf{-18 < m}$

- $6x + m < 0$ ise $x < \frac{-m}{6}$ olur.

$f(x) = x^2 + 6x + m$

$f'(x_0) = 2x_0 + 6$

$0 = 2x_0 + 6$

$-3 = x_0$

$-3 < \frac{-m}{6}$

$\mathbf{18 > m}$

Buna göre,

$-18 < m < 18$ bulunur.

$m = 16,4$ ve $m = -7,2$ olabilir.

ÖRNEK 10

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu

$f(x) = |x - m| + |x - n|$

biçiminde veriliyor.

$f'(x) = 0$ denklemini sağlayan x gerçel sayılarının en geniş aralığı $(-2,4)$ olduğuna göre,

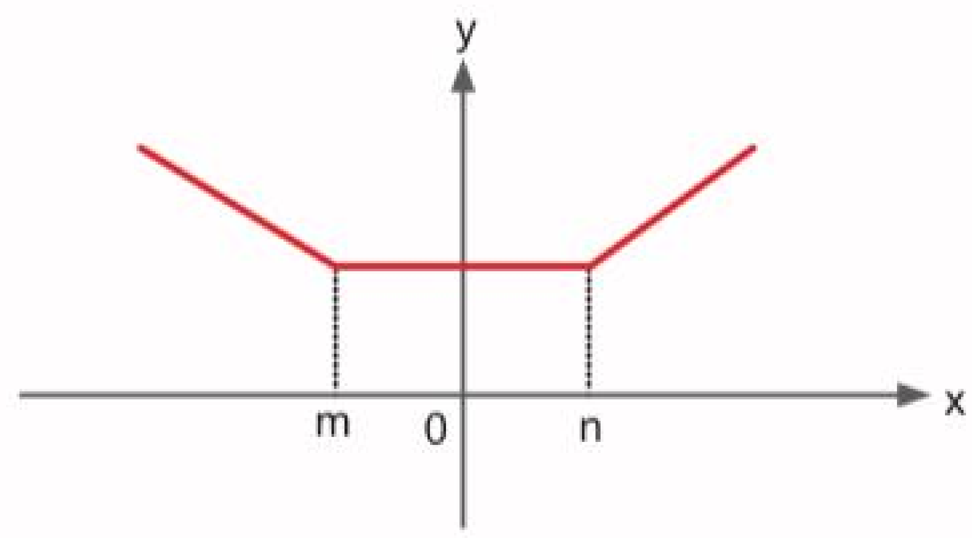
$f'(x_0^+) \cdot f'(x_0^-) = 0$

eşitliğini sağlayan x_0 ın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = |x - m| + |x - n|$

fonksiyonunun grafiği çizilirse



(m,n) aralığında $f'(x) = 0$ olur.

$m = -2$'dir.

$n = 4$'tür.

$$\left.\begin{matrix} f'(-2^+) = 0 & f'(-2^-) < 0 \\ f'(4^-) = 0 & f'(4^+) > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} f'(-2) = 0 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ \vdots \\ f'(4) = 0 \text{ olur.} \end{matrix}$$

Buna göre,

$f'(x_0^+) \cdot f'(x_0^-) = 0$

eşitliğini sağlayan x_0 değerleri $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere toplamları 7 bulunur.