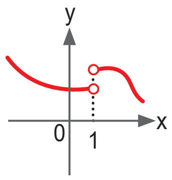
ÖRNEK 13

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için

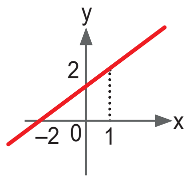
$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

eşitliği sağlanmaktadır.

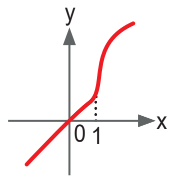
Buna göre,



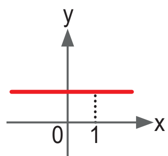
I.



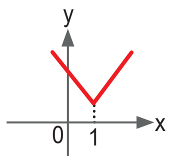
II.



III.



IV.



V.

grafiklerinden hangilerinin f(x) fonksiyonunun grafiği olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} \right)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(x)}{x - 1} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x + 1)}$$

$$= f'(1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(1) = 1 \text{ olur.}$$

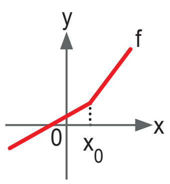
Verilen grafiklerde x = 1 apsisli noktada türevi olan ve bu noktada türevi 1'e eşit olan fonksiyon II'deki fonksiyondur.

ÖRNEK 14

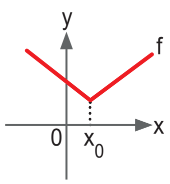
f, her noktada tanımlı bir fonksiyondur.

$f'(x_0^+) . f'(x_0^-) \leq 0$ eşitsizliği veriliyor.

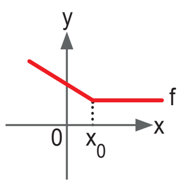
Buna göre,



I.



II.



III.

grafiklerinden hangilerinin y = f(x) fonksiyonuna ait olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

I. $\left.\begin{array}{l} f'(x_0^+) > 0 \\ f'(x_0^-) > 0 \end{array}\right\} f'(x_0^+) \cdot f'(x_0^-) > 0$ olur.

I. grafik f fonksiyonuna ait **olamaz.**

II. $\left.\begin{array}{l} f'(x_0^+) > 0 \\ f'(x_0^-) < 0 \end{array}\right\} f'(x_0^+) \cdot f'(x_0^-) < 0$ olur.

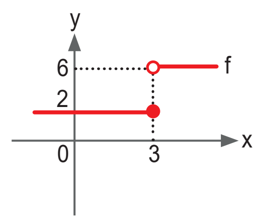
II. grafik f fonksiyonuna ait **olabilir.**

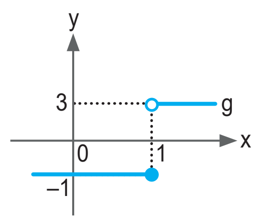
III. $\left.\begin{array}{l} f'(x_0^+) = 0 \\ f'(x_0^-) < 0 \end{array}\right\} f'(x_0^+) \cdot f'(x_0^-) = 0$ olur.

III. grafik f fonksiyonuna ait **olabilir.**

ÖRNEK 15

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir.





m ve n birer gerçel sayı olmak üzere,

$$h(x) = f(x) + m{\cdot}g(n{\cdot}x)$$

fonksiyonu tüm gerçel sayılarda türevlenebilir olduğuna göre, h(m·n) değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

h(x) fonksiyonu R'de türevli ise R'de süreklidir.

O halde

$f(3^+) = 6$ $\qquad g(1^+) = 3$

$f(3^-) = 2$ $\qquad g(1^-) = -1$ olur.

$x = 3^+$ için

$h(3^+) = f(3^+) + m{\cdot}g(n{\cdot}3^+)$ olmalı

$3n = 1$

$n = \frac{1}{3}$ olur.

$h(3^+) = 6 + m{\cdot}g(1^+)$

$h(3^-) = 2 + m{\cdot}g(1^-)$

$h(3^+) = h(3^-)$ olmalı

$6 + m{\cdot}3 = 2 + m{\cdot}(-1)$

$4m = -4$

$m = -1$ bulunur.

Buna göre,

$$h\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) + (-1) \cdot g\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= 2 + (-1) \cdot (-1) = 3 \text{ bulunur.}$$